

総合演習 31 総合演習 30 の応用問題

別解：数学Ⅲの無限等比級数で解く

(1)

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} & \xrightarrow{p} & \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} & \xrightarrow{1-q} & \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} & \xrightarrow{\frac{1}{2}} & \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} & \xrightarrow{p} & \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} & \xrightarrow{1-q} & \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} & \xrightarrow{\frac{1}{2}} & \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} & \xrightarrow{p} & \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} & \xrightarrow{1-q} & \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} & \dots \\ & & & \xrightarrow{q} & A & & & & & \xrightarrow{q} & A & & & & & & \xrightarrow{q} & A & \end{array}$$

より,

A がいきなり 2 連勝して優勝する場合の確率は pq

それ以外の場合の確率は

$$\left\{ \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \xrightarrow{1-q} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right\}_m \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \xrightarrow{q} A \quad (m \geq 1) \text{ より,}$$

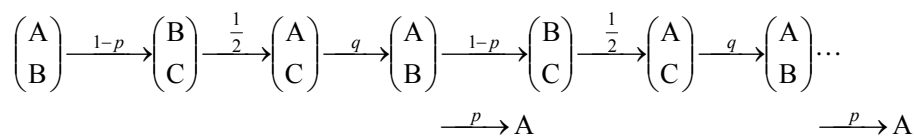
等比数列 $pq \left\{ \frac{p(1-q)}{2} \right\}^m$ の無限級数となる。また, $pq \left\{ \frac{p(1-q)}{2} \right\}^m$ に $m=0$ を代入すると pq となるから, $m=0$ の場合, すなわち A がいきなり 2 連勝する場合でも $pq \left\{ \frac{p(1-q)}{2} \right\}^m$ が成り立つ。よって, 求める確率は等比数列 $pq \left\{ \frac{p(1-q)}{2} \right\}^{n-1}$ ($n \geq 1$) の無限級数となる。これと $0 < \frac{p(1-q)}{2} < 1$ より,

求める確率は

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} pq \left\{ \frac{p(1-q)}{2} \right\}^{n-1} &= \frac{pq}{1 - \frac{p(1-q)}{2}} \\ &= \frac{2pq}{2 - p + pq} \end{aligned}$$

(2)

(1)と同様にして,



より,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p \left\{ \frac{q(1-p)}{2} \right\}^n = \frac{\frac{pq(1-p)}{2}}{1 - \frac{q(1-p)}{2}} = \frac{pq(1-q)}{2-q+pq}$$

(3)

第1戦に B が勝って A が優勝する確率

第1戦に B が勝つ確率×第2戦の A と B の対戦で A が勝ち, さらに A が優勝する確率
また, 第2戦の A と B の対戦で A が勝ち, さらに A が優勝する確率は(1)と等しい。

よって, $\frac{1}{2} \cdot \frac{2pq}{2-p+pq} = \frac{pq}{2-p+pq} \dots \textcircled{1}$

第1戦に C が勝って A が優勝する確率

第1戦に C が勝つ確率×第2戦の A と C の対戦で A が勝ち, さらに A が優勝する確率
また, 第2戦の A と C の対戦で A が勝ち, さらに A が優勝する確率は, (1)の p と q を

入れ替えた確率と等しいから, $\frac{2pq}{2-q+pq}$

よって, $\frac{1}{2} \cdot \frac{2pq}{2-q+pq} = \frac{pq}{2-q+pq} \dots \textcircled{2}$

ゆえに, ①+②より, $\frac{pq}{2-p+pq} + \frac{pq}{2-q+pq}$