総合演習 31　総合演習 30 の応用問題

別解：数学Ⅲの無限等比級数で解く

(1)

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{C} \end{pmatrix} \xrightarrow{1-q} \begin{pmatrix} \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{C} \end{pmatrix} \xrightarrow{1-q} \begin{pmatrix} \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{C} \end{pmatrix} \xrightarrow{1-q} \begin{pmatrix} \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{pmatrix} \cdots$$

$$\xrightarrow{q} \mathrm{A} \qquad\qquad \xrightarrow{q} \mathrm{A} \qquad\qquad \xrightarrow{q} \mathrm{A}$$

より，

A がいきなり 2 連勝して優勝する場合の確率は pq

それ以外の場合の確率は

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{C} \end{pmatrix} \xrightarrow{1-q} \begin{pmatrix} \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \end{pmatrix} \right\}_m \xrightarrow{p} \begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{C} \end{pmatrix} \xrightarrow{q} \mathrm{A}$$ （$m \geq 1$）より，

等比数列 $pq\left\{\dfrac{p(1-q)}{2}\right\}^m$ の無限級数となる。

また，$pq\left\{\dfrac{p(1-q)}{2}\right\}^m$ に $m=0$ を代入すると pq となるから，

$m=0$ の場合，すなわち A がいきなり 2 連勝する場合でも $pq\left\{\dfrac{p(1-q)}{2}\right\}^m$ が成り立つ。

よって，求める確率は等比数列 $pq\left\{\dfrac{p(1-q)}{2}\right\}^{n-1}$ （$n \geq 1$）の無限級数となる。

これと $0 < \dfrac{p(1-q)}{2} < 1$ より，

求める確率は

$$\sum_{n=1}^{\infty} pq\left\{\frac{p(1-q)}{2}\right\}^{n-1} = \frac{pq}{1-\dfrac{p(1-q)}{2}} = \frac{2pq}{2-p+pq}$$

(2)

(1)と同様にして，

$$\begin{pmatrix}\mathrm{A}\\\mathrm{B}\end{pmatrix}\xrightarrow{1-p}\begin{pmatrix}\mathrm{B}\\\mathrm{C}\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\mathrm{A}\\\mathrm{C}\end{pmatrix}\xrightarrow{q}\begin{pmatrix}\mathrm{A}\\\mathrm{B}\end{pmatrix}\xrightarrow{1-p}\begin{pmatrix}\mathrm{B}\\\mathrm{C}\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\mathrm{A}\\\mathrm{C}\end{pmatrix}\xrightarrow{q}\begin{pmatrix}\mathrm{A}\\\mathrm{B}\end{pmatrix}\cdots$$

$$\xrightarrow{p}\mathrm{A} \qquad\qquad \xrightarrow{p}\mathrm{A}$$

より，

$$\sum_{n=1}^{\infty} p\left\{\frac{q(1-p)}{2}\right\}^n = \frac{\dfrac{pq(1-p)}{2}}{1-\dfrac{q(1-p)}{2}} = \frac{pq(1-q)}{2-q+pq}$$

(3)

第 1 戦に B が勝って A が優勝する確率

第 1 戦に B が勝つ確率×第 2 戦の A と B の対戦で A が勝ち，さらに A が優勝する確率

また，第 2 戦の A と B の対戦で A が勝ち，さらに A が優勝する確率は(1)と等しい。

よって，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2pq}{2-p+pq}=\dfrac{pq}{2-p+pq}$　・・・①

第 1 戦に C が勝って A が優勝する確率

第 1 戦に C が勝つ確率×第 2 戦の A と C の対戦で A が勝ち，さらに A が優勝する確率

また，第 2 戦の A と C の対戦で A が勝ち，さらに A が優勝する確率は，(1)の p と q を入れ替えた確率と等しいから，$\dfrac{2pq}{2-q+pq}$

よって，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2pq}{2-q+pq}=\dfrac{pq}{2-q+pq}$　・・・②

ゆえに，①＋②より，$\dfrac{pq}{2-p+pq}+\dfrac{pq}{2-q+pq}$